13 ЛАПЛАСТЫҢ КЕРІ ТҮРЛЕНДІРУІ. РИМАН-МЕЛЛИН ФОРМУЛАСЫ

13.1 Лапластың кері түрлендіруі. Жіктелу теоремасы

Берілген $F(p)$ кескіні бойынша оған сәйкес $f(t)$ түпнұсқасын табуға мүмкіндік беретін *жіктелу теоремалары* деп аталатын екі теореманы қарастырамыз.

Теорема 15. Егер $F(p)$ функциясы $p=\infty$ нүктесінің аймағында

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^{n+1}}=\frac{c_0}{p}+\frac{c_1}{p^{21}}+\frac{c_2}{p^3}+...$$

түріндегі Лоран қатары ретінде жазылса, онда

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{t^n}{n!}=c_0+\frac{c_1 t}{1!}+\frac{c_2 t^2}{2!}+...\left(t>0\right)$$

функциясы $F(p)$ кескінінің түпнұсқасы болып табылады, яғни

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^{n+1}}\div\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{t^n}{n!}=f(t).$$

Теорема 16. Егер $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ - бөлшегі $B(p)$ бөлімі тек $p_1,p_2,...,p_n$ жай түбірлерге (нөлдері) ие болатын дұрыс рационал бөлшек болса, онда

$$f(t)=\sum_{n=1}^{n}\frac{A(p_k)_n}{B'(p_k)}e^{p_k t} \tag{13.1}$$

функциясы $F(p)$ кескінінің түпнұсқасы болып табылады.

Ескерту: c_k $(k=1,2,...,n)$ коэффициенттері $F(p)$ комплекс функциясының қарапайым полюстердегі шегермелері ретінде анықталатыны, яғни

$$c_k=\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}=\mathrm{Res}\left(\frac{A(p)}{B(p)};p_k\right)$$

түрінде оңай есептелетінін байқауға болады.

Егер $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ дұрыс бөлшек, бірақ $B(p)$ бөлімінің $p_1,p_2,...,p_n$ түбірлері (нөлдері) сәйкесінше $m_1,m_2,...,m_n$ еселі болса, онда $F(p)$ кескінінің түпнұсқасы

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\left(\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}(p-p_k)^{m_k}\right) \tag{13.2}$$

түрінде анықталады.

16-теореманы басқаша тұжырымдауға болады.

Теорема 17. Егер $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ кескіні p айнымалысының бөлшек-рационал функциясы және $p_1, p_2, ..., p_n$ - осы функцияның жай немесе жоғарғы ретті полюстері болса, онда $F(p)$ кескініне сәйкес $f(t)$ түпнұсқасы

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)} \div \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} s\left(F(p_k)\cdot e^{p_k t}\right)= f(t) \qquad (13.3)$$

формуласымен анықталады.

13.2 Риман-Меллин формуласы

Кескіні бойынша түпнұсқаны анықтау әдісін Лапластың (Риман-Меллиннің айналдыру формуласы)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p)\cdot e^{pt}dt \qquad (13.4)$$

түріндегі кері түрлендіруі береді, мұндағы интеграл кез келген $\operatorname{Re} p=\gamma > S_0$ түзуі бойымен алынады.

Белгілі шарттар орынды болганда

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p)\cdot e^{pt}dt=\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} s\left(F(p)\cdot e^{pt}; p_k\right)$$

формуласымен есептеледі.

Ескерту: Әдетте іс жүзінде түпнұсқа-функциясын анықтау келесі жоспар бойынша жүргізіледі: ең алдымен берілген $F(p)$ кескінінің сәйкес түпнұсқасын түпнұсқалар мен кескіндер кестесі бойынша табуға әрекет жасау; $F(p)$ функциясысын қарапайым рационал бөлшектердің қосындысы түрінде өрнектеп алып, сонан соң, сызықтылық қасиетін қолдана отырып түпнұсқасын табу; жіктелу теоремасын, көбейту қасиетін, айналдыру формуласын және тағы басқаларын қолдану.